

# OPTIMIZACIÓN DEL MÉTODO DE MONTECARLO Y ESTIMACIÓN DE INCERTIDUMBRE EN LA CALIBRACIÓN DE MEDIDORES VOLUMÉTRICOS PARA LA TRANSFERENCIA DE CUSTODIA DE PRODUCTOS LÍQUIDOS

Agustín García-Berrocal Sánchez <sup>(1)</sup>, Pablo Carmona Loeches <sup>(2)</sup>  
y Cristina Montalvo Martín <sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Dpto de Energía y Combustibles, ETSI de Minas y Energía,  
Universidad Politécnica de Madrid (UPM), C/ Ríos Rosas nº 21, 28003 Madrid

<sup>(2)</sup> Exolum Corporation, S.A., C/ Titán nº 13, 28045 Madrid

**RESUMEN:** Desde su publicación por ISO en 1993, el documento GUM se ha constituido en el modelo a seguir para la estimación de la incertidumbre de medida en la industria. Desde un primer momento, el "método GUM" fue criticado por sus limitaciones prácticas, que impiden optimizar las incertidumbres de calibración de los medidores volumétricos involucrados en los procesos de transferencia de custodia de productos líquidos refinados. En el presente trabajo se sustituye la propagación de varianzas del método GUM por el Método de Montecarlo (MMC). Se ha partido del "esquema GUM-S1" (Suplemento 1 del documento GUM), y se proponen las siguientes innovaciones metodológicas para optimizar el MMC adaptable (MMCA). La regulación la convergencia del MMCA aplicando los factores de cobertura de la distribución t de Student. La validación de la repetibilidad del MMCA mediante la realización iteraciones del MMCA. Y la diagnosis de la FDP del mensurando, analizando el sesgo y la curtosis, y realizando contrastes de normalidad. Para los medidores volumétricos considerados, la metodología propuesta permite reducir las incertidumbres de calibración, en comparación con el método GUM. Además, se constata que el método GUM no asigna correctamente la FDP al mensurando, y se propone una nueva expresión analítica.

## 1. INTRODUCCIÓN

Desde su publicación por ISO en 1993, el documento GUM [1] se ha constituido en el modelo a seguir para la estimación de la incertidumbre de medida en la industria. Desde un primer momento, el "método GUM" fue criticado por sus limitaciones prácticas, dado que impone ciertas condiciones de linealidad, gaussianidad y correlación estadística [2]. Estas limitaciones impiden optimizar las incertidumbres de calibración de los medidores volumétricos involucrados en los procesos de transferencia de custodia de productos líquidos refinados. Y optimizar la medida en este contexto tiene una gran repercusión económica y legal. En el presente trabajo se soslayan las debilidades del método GUM sustituyendo la propagación de varianzas por la propagación de funciones de distribución de probabilidad (FDP) del Método de Montecarlo (MMC). Siendo la principal fortaleza del MMC que, para estimar la incertidumbre expandida, evita recurrir al amparo del teorema del límite central, o recurrir a la aplicación de la distribución t de Student con ciertos grados de libertad efectivos, cuando aquel teorema no es aplicable.

Se ha partido del "esquema GUM-S1" del Suplemento 1 del documento GUM [3], y se proponen innovaciones metodológicas para optimizar la aplicación del MMC, que pueden ser útiles más allá del ámbito de la calibración de medidores o caudalímetros volumétricos. Concretamente, dentro del esquema GUM-S1, se escoge la implementación adaptable del MMC (MMCA) y se proponen las siguientes mejoras. La regulación la convergencia del MMCA aplicando los factores de cobertura de la distribución t de Student (con posibilidad de seleccionar el nivel de confianza). La validación de la repetibilidad y filtrado de valores atípicos, mediante la realización de 50 iteraciones del MMCA para asegurar la estabilidad numérica de los resultados del MMCA dentro de la tolerancia numérica seleccionada. Y la diagnosis de la FDP del mensurando, combinando el análisis de sesgo y curtosis de los resultados del MMCA

con la realización de contrastes de normalidad a una muestra de la FDP del mensurando. Para los medidores volumétricos considerados, los resultados obtenidos con la metodología propuesta, basada en esquema GUM-S1, permiten reducir las estimaciones de incertidumbre en comparación con el método GUM. Además, se ha podido constatar que el método GUM no asigna correctamente la FDP al mensurando; ya que, de la simulación de Montecarlo se deduce que dicha FDP no puede ser ni gaussiana ni una *t* de Student.

## 2. METODOLOGÍA

### 2.1 Aproximación nº 1 y estimación del mensurando

Dado un mensurando definido en función de  $n$  variables de entrada  $X_1, X_2, \dots, X_n$  por una función modelo  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , existen dos posibilidades para obtener su valor estimado  $y$ . La aproximación nº 1 consiste en sustituir las estimaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en la función modelo. Cuando cada una de las estimaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se obtiene tomando la media de  $N$  lecturas, aplicar la aproximación nº 2 supone obtener el valor  $y$  tomando la media de los  $N$  resultados obtenidos al sustituir las series de lecturas en la función modelo. Cuando la función modelo no es lineal, ambas aproximaciones no son, en general, compatibles. Sin embargo, si el rango de repetibilidad de las variables de entrada es pequeño, ambas aproximaciones son equivalentes desde el punto de vista numérico. Sin embargo, al aplicar el MMC, no cabe la aproximación nº 2, porque la simulación da directamente el valor estimado del mensurando. De hecho, en caso de que la repetibilidad –por ser su rango grande– no hiciese compatibles ambas aproximaciones, la nº 1 sería la única que tendría sentido en el marco del MMC. Y, además, el único método posible para calcular la incertidumbre sería el MMC, porque una mala repetibilidad haría inaplicable la linealización de la función modelo  $y$ , por tanto, tampoco se podría aplicar la ley de propagación de varianzas.

Como ejemplo, de cómo afecta la aplicación del MMC a la representación del mensurando, se presenta el caso de estudio de este trabajo, la función modelo del factor de corrección (*meter factor*),  $MF$ , de un medidor volumétrico (de desplazamiento positivo o de tipo turbina) calibrado contra una vasija patrón:

$$MF = \frac{V_{\text{PATRÓN}} \left\{ 1 + k_v \left[ (t + \delta t_e) - t_{\text{REF}} \right] \right\}}{V_{\text{MEDIDOR}}} + \delta MF_{\text{REP}} \quad (1)$$

donde  $V_{\text{PATRÓN}}$  es el volumen de la vasija patrón medido a una temperatura de referencia  $t_{\text{REF}}$ , el volumen  $V_{\text{MEDIDOR}}$  es el indicado por el medidor volumétrico a calibrar,  $\delta t_e$  es la corrección por estratificación de la temperatura  $t$  de la vasija,  $k_v$  es el coeficiente de expansión cúbica de la vasija patrón, y  $\delta MF_{\text{REP}}$  es la corrección del  $MF$  debida a la falta de repetibilidad del proceso. Al usar el medidor, sus lecturas deben multiplicarse por  $MF$  para hacer efectiva la calibración. La incertidumbre del  $MF$  contribuirá a la incertidumbre de los resultados del medidor.

### 2.2 Metodología general de la simulación de Montecarlo

En el método GUM “clásico”, la función modelo se usa como guía para plantear dos cálculos distintos. Primero, obtener el valor estimado del mensurando a partir de las estimaciones de las magnitudes de entrada. Segundo, estimar la incertidumbre típica del mensurando a partir de las

incertidumbres de las magnitudes de entrada. En la práctica, esto independiza la obtención del resultado de la medida de la estimación de su incertidumbre. Sin embargo, en el MMC, la función modelo se toma como una relación entre variables aleatorias, donde cada magnitud de entrada se expresa como una FDP. La función modelo representa la FDP del mensurando como una propagación de FDP. Por tanto, las muestras aleatorias (realizaciones) del mensurando se obtienen muestreando las magnitudes de entrada y sustituyendo en la función modelo los valores aleatorios obtenidos. En la práctica, las realizaciones de las magnitudes de entrada se obtienen con generadores de números pseudoaleatorios. En el ejemplo (1), basta con generar números uniformemente distribuidos y números que sigan una distribución normal.

Finalmente se obtiene una muestra de tamaño  $M$  del mensurando, siendo  $M$  el número de realizaciones generado de cada magnitud de entrada. El valor estimado del mensurando,  $y$ , se obtiene como el valor medio de la muestra, y la incertidumbre típica,  $u(y)$ , como la desviación típica muestral. En el caso de que la FDP del mensurando sea simétrica respecto de la media, la incertidumbre expandida para una probabilidad de cobertura  $p$  se obtiene directamente de como la semidiferencia entre el percentil  $(1-p)/2$ ,  $y_{\text{inf}}$ , y el percentil  $(1+p)/2$ ,  $y_{\text{sup}}$ . Cuando la FDP del mensurando es simétrica, tiene sentido el factor de cobertura,  $k$ , del método GUM clásico, pero en el MMC  $k$  se obtiene como el cociente entre la incertidumbre expandida y la típica. Cuando dicha FDP no es simétrica, el intervalo de incertidumbre tampoco lo es; y, por tanto, el factor de cobertura deja de tener sentido. En el marco del MMC, el problema del método GUM clásico para obtener  $k$  se resuelve calculando directamente la incertidumbre expandida a partir de la FDP empírica del mensurando. Al evitarse el uso de  $k$ , ya no es necesario asumir ninguna hipótesis sobre la normalidad o los grados de libertad efectivos de la FDP del mensurando.

Otra diferencia operativa entre el MMC y el método GUM clásico es que el cálculo del valor del mensurando no es independiente de la estimación de su incertidumbre. Debe realizarse la simulación generando la muestra de tamaño  $M$  cada vez que se realice una medida. Aunque las FDP de las magnitudes de entrada no cambien sus varianzas, en general sí cambiarán los valores medios de algunas de ellas, lo que obliga a realizar de nuevo las simulaciones. Por tanto, para usar el MMC sólo para estimar la incertidumbre, debe demostrarse que el valor del mensurando dado por el MMC es compatible con el resultado que daría el método GUM clásico. Entonces, éste podría sustituir al MMC para calcular el valor del mensurando. También, en rigor, debería comprobarse que los cambios en los valores medios de las magnitudes de entrada –manteniendo invariables sus varianzas– no implican cambios significativos en la incertidumbre del mensurando. Entonces la realización de una simulación del MMC podría sustituir al cálculo de incertidumbres del método GUM clásico.

### 2.3 Método de Montecarlo Adaptable (MMCA)

Al aplicar el MMC debe elegirse el tamaño  $M$  de la muestra. Si el tamaño no fuese suficientemente grande, al repetir la simulación se podrían obtener resultados diferentes. En el esquema GUM-S1, esencialmente, se dan dos alternativas: tomar muestras del orden de  $10^6$  valores o implementar el MMC adaptable (MMCA) [3,4]. En este trabajo se ha preferido el MMCA porque, en teoría, permite controlar la estabilidad del resultado y optimizar el tamaño  $M$ , aunque programarlo sea más complicado. No obstante, en la práctica se ha observado cierta falta de repetibilidad del MMCA de los resultados, especialmente los percentiles.

Usando entornos de programación como MATLAB, la implementación es sencilla y ágil. Pero, en nuestro caso, también se ha usado Excel con macros para comprobar si es posible usar una herramienta más general. Aunque en este caso la implementación no es tan sencilla ni tan ágil, dadas las limitaciones de Excel para el cálculo numérico. En Excel se acaban requiriendo tiempos de cálculo largos y se generan archivos de gran tamaño.

El MMCA se basa en pasar de una muestra de tamaño  $M$  a otra mayor, de tamaño  $h \times M$ , que tenga mejor significación estadística, siendo  $h$  cierto número entero. El valor de  $h$  se obtiene mediante un proceso iterativo. Partiendo de la primera muestra de tamaño  $M$ , se van generando independientemente más muestras de tamaño  $M$  que se van yuxtaponiendo para ir constituyendo muestras de tamaños  $2 \times M$ ,  $3 \times M$ ,  $4 \times M$ , ...,  $h \times M$  hasta que la significación estadística de la muestra  $h \times M$  sea óptima en comparación con la tolerancia numérica de la incertidumbre típica,  $u(y)$ , del mensurando. Con la muestra óptima se estima el valor del mensurando, su incertidumbre típica y los percentiles que conducen a la incertidumbre expandida. En el marco del MMC, la tolerancia numérica,  $\delta$ , es el semi-rango que delimita el último decimal significativo de  $u(y)$ , y varía según sea el número de cifras significativas seleccionado para expresar  $u(y)$ . En este trabajo, dichas cifras son siempre 2.

Según el esquema GUM-S1, el valor de  $M$  debe ser  $10^4$  para conseguir una probabilidad de cobertura menor o igual al 99 %, lo que permite una cobertura equivalente a  $k = 2$  para una gaussiana (no podría alcanzarse  $k = 3$ ). Para tener mayor cobertura que 99 % debe aumentarse  $M$ . Para determinar  $h$  hay que ver cuándo se ha conseguido mejorar la estadística hasta hacerla óptima. Para ello, se calculan los descriptores estadísticos  $y$ ,  $u(y)$ ,  $y_{\text{inf}}$ ,  $y_{\text{sup}}$ , asociados a las  $h$  muestras independientes de tamaño  $M$ , obteniéndose una muestra de tamaño  $h$  para cada descriptor. Las correspondientes medias muestrales serían  $\bar{y}$ ,  $\bar{u}(y)$ ,  $\bar{y}_{\text{inf}}$ ,  $\bar{y}_{\text{sup}}$ . Se calculan las desviaciones típicas de estas medias muestrales:  $s(\bar{y})$ ,  $s[\bar{u}(y)]$ ,  $s(\bar{y}_{\text{inf}})$ ,  $s(\bar{y}_{\text{sup}})$ . En GUM-1 se indica que debe seleccionarse el primer  $h$  tal que los valores  $2s(\bar{y})$ ,  $2s[\bar{u}(y)]$ ,  $2s(\bar{y}_{\text{inf}})$ ,  $2s(\bar{y}_{\text{sup}})$  sean todos menores que  $\delta$ .

## 2.4 Propuestas de mejora para el MMCA

El criterio de selección del valor de  $h$  de GUM-S1 supone que los valores medios de los descriptores,  $y$ ,  $u(y)$ ,  $y_{\text{inf}}$ ,  $y_{\text{sup}}$ , obtenidos en cada iteración siguen una distribución normal; y, por tanto, dicho criterio de selección tendría un nivel de confianza del 95,45 %. En rigor, ello es correcto cuando  $h$  es "grande"; pero en la práctica no es así. Esto implica que se está subestimando el factor que debe multiplicar a  $s(\bar{y})$ ,  $s[\bar{u}(y)]$ ,  $s(\bar{y}_{\text{inf}})$ ,  $s(\bar{y}_{\text{sup}})$ . En este trabajo se propone usar el factor de cobertura de una distribución t de Student con  $h - 1$  grados de libertad. En caso de que el número de grados de libertad fuese alto y compatible con una estadística gaussiana, la propia t de Student tendería a una gaussiana y se recuperaría el criterio de GUM-S1, justo en el caso en que es válido. En principio, el factor de Student que se debería emplear sería el correspondiente a un nivel de confianza del 95,45 %, ya que en GUM-S1 se multiplican por 2 las desviaciones  $s(\bar{y})$ ,  $s[\bar{u}(y)]$ ,  $s(\bar{y}_{\text{inf}})$ ,  $s(\bar{y}_{\text{sup}})$ . Podría emplearse un nivel de confianza mayor (v.g. 99,73 %) pero ello implicaría más iteraciones para converger al

valor de  $h$ , lo que conllevaría un mayor peso computacional, si no se usase un lenguaje de alto nivel.

Por tanto, la primera propuesta de mejora para el MMCA consiste en cambiar criterio de aceptación y rechazo de  $h$  de GUM-S1 para que sea también adaptable; es decir, que el criterio sea más exigente cuanto menor sea el valor de  $h$ . Y que se tome el nivel de confianza de la optimización de  $h$  como 95,45 % (GUM-S1) o mayor, en función de la exigencia de cada caso.

En segundo lugar, se propone la validación de la repetibilidad del MMCA usando  $\delta$  como referencia. En la práctica, cuando se realiza un nuevo ciclo de iteraciones, la falta de repetibilidad puede conllevar la variabilidad de  $y$ ,  $u(y)$ ,  $y_{\text{inf}}$ ,  $y_{\text{sup}}$ ; y la obtención de un nuevo valor  $h' \neq h$ . Por tanto, se propone considerar  $R$  repeticiones del ciclo adaptable y comprobar si cambian los valores  $y$ ,  $u(y)$ ,  $y_{\text{inf}}$ ,  $y_{\text{sup}}$  redondeados según  $\delta$ . Para realizar este redondeo, primero se redondea  $u(y)$  según  $\delta$ , y después  $y$ ,  $y_{\text{inf}}$ ,  $y_{\text{sup}}$  según  $u(y)$ . La precisión de los resultados finales del MMCA debe ajustarse siempre a  $\delta$ ; porque, si no, siempre se observaría una variabilidad espuria. Para dar un resultado estable, se promediarán los  $R$  valores  $y$ ,  $u(y)$ ,  $y_{\text{inf}}$ ,  $y_{\text{sup}}$  redondeados según  $\delta$ . Para confirmar la estabilidad, se calcularán las desviaciones típicas de las medias muestrales multiplicadas por 2 o 3, según la exigencia, y se comprobará que los resultados sean nulos redondeados según  $\delta$ . Esto asegura que la repetibilidad de los resultados  $y$ ,  $u(y)$ ,  $y_{\text{inf}}$ ,  $y_{\text{sup}}$  con un nivel de confianza 95,45 % ó 99,73 %, siempre que el número  $R$  sea lo suficientemente grande. Por ello, en este trabajo se ha tomado  $R = 50$ .

En tercer lugar, se propone la diagnosis de la FDP empírica del mensurando. Para ello, se combina la estimación de sesgo y curtosis con la realización de contrastes de normalidad. Para cuantificar el diagnóstico, se propone un índice de desviación de la normalidad basado en la curtosis. Debe comprobarse que el sesgo es nulo para validar la simetría del intervalo  $[y_{\text{inf}}, y_{\text{sup}}]$  respecto de  $y$ , antes de calcular la incertidumbre expandida y el factor  $k$ . Se proponen tres tipos de pruebas de hipótesis: de función de distribución (test de Lilliefors y test de Anderson-Darling), de momentos (tests D'Agostino para el sesgo y la curtosis, y test Ómnibus de D'Agostino) y de correlación mínimo-cuadrática (test de Shapiro-Wilk). Con estos tests se pretende probar si se puede rechazar que las muestras provengan de una población normal, con una confianza del 95 %. Si no se produce el rechazo, tampoco puede asegurarse la normalidad.

### 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se presenta como caso de estudio un medidor volumétrico (de desplazamiento positivo o de tipo turbina) calibrado contra una vasija patrón para obtener su factor de calibración  $MF$ . La función modelo del proceso de calibración es la ecuación (1). Para representar las magnitudes de entrada de la función modelo sólo se han utilizado FDP rectangulares y normales (gaussianas). Para modelizar la repetibilidad,  $\delta MF_{\text{REP}}$ , se ha utilizado una FDP rectangular cuyo semi-rango es la tolerancia de repetibilidad del ensayo, lo que evita tener que simular la FDP  $t$  de Student. Tampoco ha habido que considerar correlación estadística entre las magnitudes de entrada. Los resultados del MMCA se recogen en la Tabla 1 en comparación con los que proporciona el método GUM clásico. En dicha tabla:  $MF$  es el valor estimado del factor de calibración,  $u(MF)$  es la incertidumbre típica,  $U(MF)$  es la incertidumbre expandida,  $k$

es el factor de cobertura,  $MF_{inf}$  y  $MF_{sup}$  son los percentiles  $(1 \pm p)/2$ ,  $W(MF)$  es la incertidumbre expandida relativa expresada en porcentaje. El  $MF$  es una magnitud adimensional porque es un cociente de volúmenes, figura "Adim." en la Tabla 1; lo mismo que las incertidumbres  $u(MF)$  y  $U(MF)$ , los percentiles  $MF_{inf}$  y  $MF_{sup}$ , y la tolerancia numérica. En la Tabla 1, la tolerancia numérica es  $5 \times 10^{-6}$  porque  $u(MF) = 36 \times 10^{-5}$  expresada con dos cifras significativas. En la Tabla 1, para  $U(MF)$ ,  $MF_{inf}$  y  $MF_{sup}$ , la probabilidad de cobertura es 95 % ( $p = 0,95$ ). El valor  $k$  (GUM) = 2 porque se aplica el Teorema del Límite Central y se asigna a  $MF$  una distribución normal. El valor  $k$  (GUM-S1) = 1,86 se obtiene como  $(MF_{inf} - MF_{sup})/2 u(MF)$ , expresados  $u(MF)$ ,  $MF_{inf}$  y  $MF_{sup}$  sólo con 5 decimales, según la tolerancia numérica. En la Tabla 1 aparece "No aplica" para  $MF_{inf}$  y  $MF_{sup}$  en el método GUM, aunque podrían calcularse con una distribución normal de media 1,024 51 (adim.) y desviación típica  $35,65 \times 10^{-5}$  (adim.). La tolerancia numérica no tiene sentido en el método GUM.

GUM-S1 (MMCA)			Método GUM			GUM-S1 (MMCA)			Método GUM		
$MF$	1,024 51	Adim.	$MF$	1,024 51	Adim.	$U(MF)$	0,000 67	Adim.	$U(MF)$	0,000 713	Adim.
$u(MF)$	0,000 36	Adim.	$u(MF)$	0,000 356 5	Adim.	$k$	1,86	Adim.	$k$	2	Adim.
$MF_{inf}$	1,023 84	Adim.	$MF_{inf}$	No aplica	--	$W(MF)$	0,065	%	$W(MF)$	0,070	%
$MF_{sup}$	1,025 18	Adim.	$MF_{sup}$	No aplica	--	Tolerancia numérica	0,000 005	Adim.	Tolerancia numérica	No aplica	--

**Tabla 1: Resultados de la calibración de un medidor volumétrico contra una vasija patrón aplicando el MMCA y el método GUM, con una probabilidad de cobertura del 95 %.**

Los valores GUM-S1 de  $MF$ ,  $u(MF)$ ,  $MF_{inf}$  y  $MF_{sup}$  se han obtenido promediando los resultados de  $R = 50$  repeticiones del MMCA. Se ha calculado la desviación típica de la media muestral de  $MF$ ,  $u(MF)$ ,  $MF_{inf}$  y  $MF_{sup}$ . Multiplicando por 3 estas desviaciones típicas, se han obtenido resultados menores que la tolerancia numérica. Suponiendo que las medias se distribuyen normalmente, se garantiza la repetibilidad de los resultados  $MF$ ,  $u(MF)$ ,  $MF_{inf}$  y  $MF_{sup}$  con un nivel de confianza del 99,73 %. (La falta de repetibilidad del MMCA en las 50 repeticiones sólo afecta a  $MF$ ,  $MF_{inf}$  y  $MF_{sup}$ ; cuyos valores, tras ser redondeados, fluctúan  $\pm 1 \times 10^{-5}$ .)

Comparando los resultados GUM-S1 (MMCA) con el método GUM, se observa que la incertidumbre expandida  $U(MF)$  dada por GUM-S1 es menor, lo que implica una disminución del 7,1 % en la incertidumbre expandida relativa  $W(MF)$ . También se observa que el valor  $MF$  (GUM-S1) es idéntico a  $MF$  (GUM), lo que indica un comportamiento lineal de la función modelo dentro del rango de las magnitudes de entrada. El valor GUM de  $u(MF)$  expresado con dos cifras significativas es idéntico al valor GUM-S1 de  $u(MF)$ , lo que indica que las incertidumbres de las magnitudes de entrada son lo suficientemente pequeñas para aplicar la Ley de Propagación de la Incertidumbre del método GUM.

El valor GUM-S1 de  $U(MF)$  es un 6 % menor que el valor GUM de  $U(MF)$ , debido a los diferentes valores de  $k$ , lo que supone un indicio de que la FDP del  $MF$  no es gaussiana. Siguiendo la metodología propuesta en este trabajo, para confirmarlo se han realizado los tests de normalidad detallados en el epígrafe 2.4. Todos rechazan claramente la normalidad, salvo el test de D'Agostino para el sesgo. Todos los rechazos tienen un  $p$ -valor prácticamente

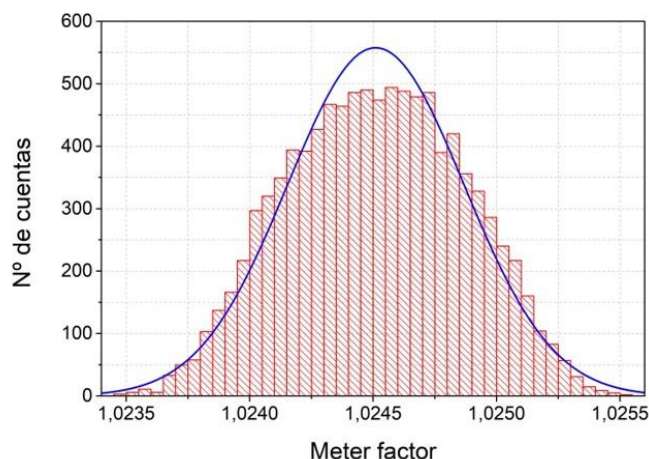
despreciable (“ $p$ ” ahora no tiene relación con la probabilidad de cobertura “ $p$ ”). También se han estimado el sesgo y la curtosis de la FDP empírica del  $MF$ .

Para garantizar la repetibilidad del MMCA, éste se ha repetido  $R = 50$  veces, lo que ha permitido generar sendas muestras de 50 valores de sesgo y curtosis. Calculando las medias muestrales, el sesgo resulta 0,00 y la curtosis resulta  $-0,55$ . La precisión de estos resultados se deduce del valor de las desviaciones típicas de sus medias muestrales. En efecto, si ambas se multiplican por 2, los productos son inferiores a 0,002. (Considerando que la media de una muestra de 50 valores se distribuye normalmente, las estimaciones del sesgo y curtosis tienen un nivel de confianza del 95,45 %).

El hecho de que el sesgo sea nulo permite explicar por qué el test D’Agostino para el sesgo no pudiese rechazar la normalidad. En cuanto al orden de magnitud del valor  $-0,55$  de la curtosis, puede apreciarse mejor si se tiene en cuenta que esta “curtosis” es realmente el “exceso de curtosis” respecto de la curtosis de una gaussiana, que vale 3. El valor negativo indica que, en lugar de exceso, hay defecto de curtosis.

El índice que se propone para medir la desviación de la normalidad (con signo) resulta de dividir el exceso de curtosis por 3 (expresado en tanto por ciento). En nuestro caso, el índice de la FDP del  $MF$  vale  $-18,3$  %, indicando una desviación del  $-18,3$  % respecto de una gaussiana (nótese que una FDP rectangular tendría una desviación del  $-40$  %). El método GUM clásico nunca podría asignar correctamente la FDP, aunque tomase una  $t$  de Student en vez de una gaussiana, porque la  $t$  Student tiene siempre un exceso de curtosis positivo.

Finalmente, en la Fig. 1 se presenta el histograma de la FDP empírica del  $MF$ , junto con una FDP gaussiana centrada en el valor estimado de  $MF$  y con desviación típica igual a  $u(MF)$ . Se observa que la FDP del  $MF$  se desvía claramente de la gaussiana: se reducen sus colas y se aplanan más la zona central, como es de esperar cuando se reduce la curtosis.



**Fig. 1: En rojo, histograma de la FDP empírica del meter factor ( $MF$ ). En azul, ajuste gaussiano.**

Aunque, como se ha visto más arriba, la función modelo de  $MF$  podría linealizarse, la desviación de la normalidad indica que no se estarían cumpliendo las condiciones del Teorema del Límite Central. Para un caso como este, el propio documento GUM-S1 [3] da la pauta en su apartado 5.7. Ahí se establecen las “condiciones para la aplicación válida del enfoque GUM en modelos lineales” y, en su Nota 4, reza: “El enfoque GUM puede no ser aplicable cuando exista una  $X_i$ , cuya distribución asignada no sea gaussiana y la contribución correspondiente a  $u(y)$

sea dominante”. En nuestro caso, la distribución rectangular asignada a la repetibilidad del  $MF$  es dominante y es la causa de la pérdida de normalidad. Para demostrarlo, se simuló la FDP de  $MF$  eliminando el término  $\delta MF_{\text{REP}}$ , obteniéndose una FDP claramente gaussiana. Además, se sabe que una función modelo aditiva consistente en la suma de una gaussiana y una rectangular dominante sigue una distribución Flatten-Gaussian [5,6]. Esto permite asignar, a la FDP de  $MF$ , la siguiente expresión analítica:  $g_{MF}(\xi) = A \exp(-a\xi^2 - b\xi^4)$ , escrita siguiendo la notación de GUM-S1. Los parámetros  $a$  y  $b$  dependen de  $u(MF)$  y la curtosis. El valor de la constante de normalización  $A$  depende de  $a$  y  $b$ .

#### 4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se soslayan las debilidades del método GUM sustituyendo la propagación de varianzas por la propagación de funciones de distribución de probabilidad (FDP) del Método de Montecarlo (MMC), evitándose recurrir al Teorema del Límite Central; o, en su defecto, tomar una distribución t de Student con ciertos grados de libertad efectivos.

Se ha partido del MMC adaptable (MMCA) del Suplemento 1 del documento GUM, y se han propuesto las siguientes innovaciones metodológicas. La regulación la convergencia del MMCA aplicando los factores de cobertura de la distribución t de Student. La validación de la repetibilidad del MMCA mediante la realización de 50 iteraciones del MMCA para asegurar la estabilidad numérica de los resultados. Y la diagnosis de la FDP del mensurando, analizando el sesgo y curtosis de los resultados del MMCA, y realizando contrastes de normalidad.

Para los medidores volumétricos (de desplazamiento positivo o de tipo turbina) empleados en la logística de hidrocarburos, calibrados contra una vasija patrón, la metodología propuesta permite reducir la incertidumbre de calibración en comparación con el método GUM clásico.

En el caso de estudio, se ha podido demostrar que el método GUM clásico no asigna correctamente la FDP al mensurando. De la simulación de Montecarlo se deduce que dicha FDP no puede ser ni gaussiana, ni una t de Student. Además, como expresión analítica para dicha FDP, se propone una distribución Flatten-Gaussian.

#### 5. REFERENCIAS

- [1] JCGM/WG 1, “Evaluación de datos de medición. Guía para la expresión de la incertidumbre de medida (2008)”, Ed.: Centro Español de Metrología (CEM), 3ª ed. esp., 2009
- [2] M. G. Cox y B. R. L. Siebert, *Metrología*, 43 (2006) S178
- [3] JCGM/WG 1, “Evaluación de datos de medición. Suplemento 1 de la ‘Guía para la expresión de la incertidumbre de medida’. (2008)” Ed.: CEM, 1ª ed. esp., 2010
- [4] Xiu-lan Wen, et al, *Precision Engineering*, 37 (2013) 856-864
- [5] J. Blázquez, A. García-Berrocal, C. Montalvo y M. Balbás, *Metrología*, 45 (2008) 503-506
- [6] P. Fotowicz, *Measurement*, 55 (2014) 272-275

#### 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado dentro del programa de investigación de la Cátedra-Empresa Exolum de la Universidad Politécnica de Madrid, gracias al apoyo de la compañía Exolum.